Devoir surveillé n° 4

Vendredi 31 janvier

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Rappel des consignes

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1. Polynômes de Tchebychev (*d'après CCINP TPC 2024 et EPITA TSI 2023*)
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n.
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on désigne par $\operatorname{cd}(P)$ son coefficient dominant et par $\deg(P)$ son degré.

Partie A - Questions préliminaires

Q1. Donner le tableau de variation de arccos sur $[-1\,;1]$ avec les valeurs remarquables.
Tracer sur un même repère orthonormal, le graphe de cos sur $[0\,;\pi]$ et celui de arccos sur $[-1\,;1]$. *On n'oubliera pas de représenter les tangentes horizontales et verticales éventuelles.*

Q2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler, sans la justifier, l'expression de $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$.

Pour les deux questions suivantes, il est attendu une démonstration faisant appel aux formules de trigonométrie vues en cours, en particulier celles donnant le cosinus d'une somme ou le cosinus d'une différence.

Q3. Montrer que pour a, b réels : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$.

Q4. Établir que pour tout x réel : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Partie B - Une famille de fonctions

Pour tout entier naturel n, on appelle f_n la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big).$$

Q5. Soit $x \in [-1\,;1]$. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sous forme d'un polynôme.

Q6. À l'aide de **Q3**, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-1\,;1]$, $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x)$.

Q7. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Montrer simultanément et par récurrence double que $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q8. Prouver que pour tout entier n, la famille $\big(T_0, T_1, \ldots, T_n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q9. Montrer que pour $x \in [-1\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = f_n(x)$.

Q10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $T_n(\cos\theta) = 0$ si et seulement si $\cos(n\theta) = 0$. En déduire l'ensemble des racines de T_n.

Partie C - Un produit scalaire

Q12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q13. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. On pourra distinguer deux cas suivant la parité de k.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Q14. Déduire de la question précédente que l'application φ est bien définie.

Q15. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Partie D - Une base orthogonale

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini dans la partie C que l'on note désormais $\langle P \mid Q\rangle$.
La norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Q16. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$.

a) Démontrer que si $p \neq q$, alors $I_{p,q} = 0$.

b) Calculer $I_{0,0}$.

c) Calculer $I_{p,p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Q17. À l'aide du changement de variable $x = \arccos(t)$ et de **Q16**, montrer que la famille $\big(T_0, \ldots, T_n\big)$ définie dans la partie B est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q18. Déterminer la norme de T_p pour $p \in \mathbb{N}$. La base $\big(T_0, \ldots, T_n\big)$ est-elle orthonormale ?

Q19. Justifier que le polynôme T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q20. En utilisant un résultat du cours, donner une expression de X^n en fonctions des polynômes de la base orthogonale $(T_0, \ldots, T_n)$.

Q21. À l'aide du calcul de $\langle T_n - 2^{n-1}X^n \mid T_n\rangle$, montrer enfin que $\langle X^n \mid T_n\rangle = \dfrac{\pi}{2^n}$.

Exercice 2. Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ (*d'après CCINP 2021*)

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, P). Pour X une variable aléatoire sur Ω, on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.
On dit qu'une variable aléatoire X sur (Ω, P) suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad P(X = -1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Partie I - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé direct.

I.1 - Rotations du plan

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que la matrice de la rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'angle θ est $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On note f_θ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à cette matrice de rotation.

Q22. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.

À partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x + \mathrm{i}y$ dans $\mathbb{C}$.

Q23. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x, y)$ s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(x + \mathrm{i}y)$.

Pour la suite de cette partie, on admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

I.2 - Racines n-ièmes de l'unité

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n-ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note, pour $k \in [\![0\,; n-1]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}$.

Q24. Montrer que $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ sont précisément les racines n-ièmes de l'unité.

Q25. Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,; n-1]\!]$, on a : $r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}$.

Q26. Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique de ω_0, ω_1, ω_2 et ω_3.

I.3 - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-\mathrm{i}$).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$ que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n. Ainsi A_n prend ses valeurs dans $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.
On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait D_n suit une loi de Rademacher.

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}D_n}\, A_n$.

Q28. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la variable D_n et le fait que $\{(A_n = 1), (A_n = \mathrm{i}), (A_n = -1), (A_n = -\mathrm{i})\}$ est un système complet d'événements de Ω, justifier que :

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = \mathrm{i}) + \frac{1}{2}P(A_n = -\mathrm{i}).$$

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justifier, exprimer avec des formules analogues, $P(A_{n+1} = \mathrm{i})$, $P(A_{n+1} = -1)$ et $P(A_{n+1} = -\mathrm{i})$.

On note la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Q30. Sans calcul, justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Q31. La matrice M est-elle inversible ?

Q32. Montrer que -1 est valeur propre de M.

Q33. Montrer que le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Q34. Déterminer une base de l'image de M puis retrouver que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ grâce aux dimensions des sous-espaces propres.

Q35. Soit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = \mathrm{i}) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -\mathrm{i}) \end{pmatrix}$. On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est, c'est-à-dire $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Expliquer la démarche, sans mener les calculs, pour obtenir une expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$ des probabilités $P(A_n = 1)$, $P(A_n = \mathrm{i})$, $P(A_n = -1)$ et $P(A_n = -\mathrm{i})$.

Partie II - Orthonormalité des lois de Rademacher

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Un produit scalaire

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs :

$$V_f(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X(\Omega) \text{ est fini}\}.$$

Q36. Montrer que si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ et montrer que $E(X) = 0$.

Q37. Montrer que $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On définit l'application Φ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$ par :

$$\Phi(X, Y) = E(XY)$$

où E désigne l'espérance et X et Y sont deux éléments de $V_f(\Omega)$.

Q38. Montrer que l'application Φ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.

II.2 - Orthonormalité et projection

On considère $X_1, \ldots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

On **admet** que, si i et j sont dans $[\![1\,;n]\!]$ avec $i \neq j$, on a $E(X_i X_j) = 0$.

Q39. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour le produit scalaire Φ.

On garde dans cette dernière sous-partie les notations introduites ci-dessus. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, \ldots, X_n$.

Q40. Déterminer la dimension de F.

Q41. Soit $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$. Déterminer le projeté orthogonal de X sur F.

Q42. En déduire la distance de X à F.